全品
SINCE 1992

教育图书 功能学具 学生之家

基础教育行业专研品牌

30+年专注教育行业

全品学练考

主编 肖德好

导学案

高中数学

选择性必修第二册 SJ

天津出版传媒集团
天津人民出版社

CONTENTS 目录 导学案

第 6 章 空间向量与立体几何

6.1 空间向量及其运算

6.1.1 空间向量的线性运算

【学习目标】

1. 类比平面向量，能直接获得空间向量的概念，以及零向量、单位向量、相反向量、共线向量、相等向量的概念.

2. 在平面向量的基础上，能应用平行四边形法则和三角形法则进行空间向量的加减运算.

3. 类比平面向量，能进行空间向量的数乘运算.

课前预习 知识导学 素养初识

◆ 知识点一 空间向量及有关概念

1. 在空间，我们把像位移、力、速度、加速度这样既有________又有________的量，叫作空间向量，空间向量的大小叫作空间向量的________或________.

符号表示：空间向量用字母 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，… 表示，也用有向线段表示，有向线段的________表示空间向量的模，向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点是 A，终点是 B，则向量 $\boldsymbol{a}$ 也可以记作 $\overrightarrow{AB}$，其模记为________或________.

2. 几类特殊的空间向量

名称	定义及表示
零向量	规定长度为 0 的向量叫作________，记为 $\mathbf{0}$
单位向量	________的向量叫作单位向量
相反向量	与向量 $\boldsymbol{a}$ 长度________，方向________的向量，叫作 $\boldsymbol{a}$ 的相反向量，记为________
相等向量	方向________且长度________的向量看作相等向量

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)零向量是没有方向的. ( )

(2)两个有共同起点且相等的空间向量，其终点必相同. ( )

(3)空间中，方向相反的两个向量是相反向量.( )

(4)空间中，所有单位向量都是相等的. ( )

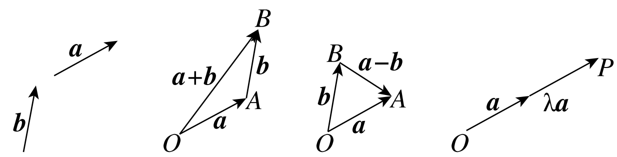
◆ 知识点二 空间向量的线性运算

1. 空间向量的加法、减法与数乘运算的意义如图.

$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；

$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$；

$\overrightarrow{OP}=\lambda\boldsymbol{a}(\lambda\in\mathbf{R})$.



2. 空间向量的加法和数乘运算满足如下运算律：

(1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=$________；

(2)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=$________；

(3)$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=$________$(\lambda\in\mathbf{R})$.

【诊断分析】 1. 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$. ( )

(2)有限个向量求和，交换相加向量的顺序，其和不变. ( )

(3)若 $\lambda\in\mathbf{R}$，则 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$. ( )

2. 空间向量的加、减法运算与平面向量的加、减法运算是否相同？平面向量加、减法的运算律在空间向量中还适用吗？

◆ 知识点三　共线向量及共线向量定理

1. 定义：如果表示空间向量的有向线段所在的直线________，那么这些向量叫作共线向量或平行向量.

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作________.

规定：零向量与任意向量________，即对于任意向量 $\boldsymbol{a}$，都有 $\boldsymbol{0}$________$\boldsymbol{a}$.

2. 共线向量定理

对空间任意两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线的充要条件是存在实数 λ，使________.

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　空间向量的有关概念及应用

例 1 (多选题)给出下列四个说法，其中正确的是 (　　)

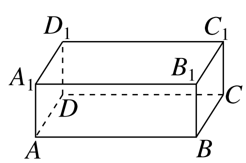
A. 若两个空间向量相等，则它们的起点相同，终点也相同

B. 若空间向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$

C. 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，必有 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}$

D. 若空间向量 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{p}$ 满足 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}=\boldsymbol{p}$，则 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{p}$

变式 (多选题)[2025·湖北襄阳五中高二开学考] 如图所示，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=3,AD=2,AA_1=1$，则在以八个顶点中的两个分别为始点和终点的向量中 (　　)



A. 单位向量有 8 个

B. 与 $\overrightarrow{AB}$ 相等的向量有 3 个

C. $\overrightarrow{AA_1}$ 的相反向量有 4 个

D. 模为 $\sqrt{5}$ 的向量有 4 个

[素养小结]

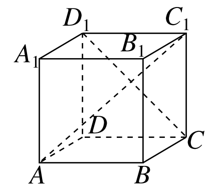
解答空间向量有关概念问题的关键点及注意点

(1)关键点：紧紧抓住向量的两个要素，即大小和方向.

(2)注意点：①零向量不是没有方向，它的方向是任意的. ②单位向量的方向虽然不一定相同，但它们的长度都是 1. ③两个向量的模相等，不一定是相等向量；反之，若两个向量相等，则它们不仅模相等，而且方向相同. 若两个向量的模相等，方向相反，则它们为相反向量.

◆ 探究点二　空间向量的线性运算

例 2 (1)(多选题)如图所示，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，下列各式的运算结果为 $\overrightarrow{AC_1}$ 的有 (　　)



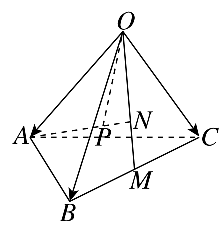
A. $(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})+\overrightarrow{CC_1}$

B. $(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1D_1})+\overrightarrow{D_1C_1}$

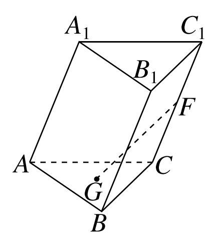
C. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{D_1C}$

D. $(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1B_1})+\overrightarrow{B_1C_1}$

(2)[2025·江苏无锡高二期中] 如图，M 是四面体 $O\text{-}ABC$ 的棱 BC 的中点，点 N 在线段 OM 上，点 P 在线段 AN 上，且 $MN=\dfrac{1}{2}ON$，$AP=\dfrac{3}{4}AN$，用向量 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 表示 $\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OP}$.



变式 (1)如图，在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，F 是 CC_1 的中点，G 为 $\triangle ABC$ 的重心，则 $\overrightarrow{GF}=$ (　　)



A. $-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$

B. $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$

C. $-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$

D. $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$

(2)若 A,B,C,D 为空间中不同的四个点，则下列各式中运算结果不一定为零向量的是　　(　　)

A. $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}$

B. $2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BD}$

D. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD}$

[素养小结]

利用三角形法则和平行四边形法则进行向量的加法运算时，务必要注意和向量的方向，必要时可对空间向量自由平移进而获得更准确的结果.

◆ 探究点三　空间向量的共线问题

例3 (1)已知空间向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，$\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DC}=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DB}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，则下列三点一定共线的是　　(　　)

A. A,B,C

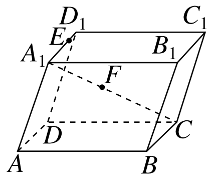
B. A,B,D

C. A,C,D

D. B,C,D

(2)若空间向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线，则使 $2k\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{e}_1+2(k+1)\boldsymbol{e}_2$ 共线的 k 的值为________.

变式 如图所示，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$\overrightarrow{A_1E}=\frac{2}{3}\overrightarrow{A_1D_1}$，$\overrightarrow{A_1F}=\frac{2}{3}\overrightarrow{FC}$. 试运用向量方法证明：$E,F,B$ 三点共线.



[素养小结]

(1)证明空间向量共线的方法：证明空间向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线的关键是利用已知条件找到实数 λ，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$ 成立，在做题时要运用空间向量的运算法则，结合空间图形，化简得出 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$，从而得出 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

(2)证明空间三点共线的思路：对于空间三点 P,A,B，可通过证明下列结论来证明 P,A,B 三点共线.

①存在实数 λ，使 $\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{PB}$ 成立.

②对空间任一点 O，有 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}(x+y=1)$.

6.1.2　空间向量的数量积

【学习目标】

1. 结合立体几何与空间向量的特征，知道投影向量的概念.
2. 类比平面向量，能进行空间向量的数量积运算.
3. 类比平面向量并借助空间图形，知道空间向量的有关运算律，能运用数量积解决空间中的垂直、夹角及距离问题.

课前预习　　知识导学　素养初识

◆ 知识点一　空间向量的夹角

1. 定义：$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是空间两个非零向量，过空间任意一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\angle AOB=\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记作 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，如下图.

2. 夹角的取值范围：

(1)规定：________________.

(2)如果____________，那么向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向；如果____________，那么向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向；如果____________，那么称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直，并记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 的夹角等于向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{DC}$ 的夹角.　　(　　)

(2)若向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 的夹角为 α，则直线 AB 与 CD 的夹角也为 α.　　(　　)

◆ **知识点二　空间向量的数量积**

1. 定义：设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是空间两个非零向量，我们把数量____________叫作向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的数量积，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即________________.

规定：零向量与任一向量的数量积为 0.

2. 常用结论（$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量）

(1)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$________.

(2)$|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=$________.

(3)$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=$________.

3. 数量积的运算律

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

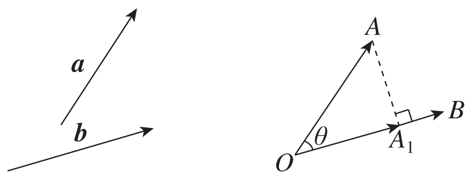
(2)$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\lambda\in\mathbf{R})$；

(3)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

◆ **知识点三　投影向量**

1. 向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量

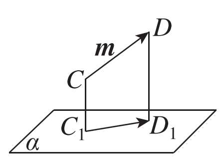
(1)定义：对于空间任意两个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，设向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$（如图），过点 A 作 $AA_1\perp OB$，垂足为 A_1. 上述由向量 $\boldsymbol{a}$ 得到向量 $\overrightarrow{OA_1}$ 的变换称为向量 $\boldsymbol{a}$ 向向量 $\boldsymbol{b}$ 投影，向量 $\overrightarrow{OA_1}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量.



(2)意义：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA_1}\cdot\boldsymbol{b}$，即向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的数量积就是向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量与向量 $\boldsymbol{b}$ 的数量积.

2. 向量 $\boldsymbol{m}$ 在平面 α 上的投影向量

(1)定义：如图，设向量 $\boldsymbol{m}=\overrightarrow{CD}$，过 C,D 分别作平面 α 的垂线，垂足分别为 C_1,D_1，得向量 $\overrightarrow{C_1D_1}$，



我们将上述由向量 $\boldsymbol{m}$ 得到向量 $\overrightarrow{C_1D_1}$ 的变换称为向量 $\boldsymbol{m}$ 向平面 α 投影，向量 $\overrightarrow{C_1D_1}$ 称为向量 $\boldsymbol{m}$ 在平面 α 上的投影向量.

(2)意义：$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\overrightarrow{C_1D_1}\cdot\boldsymbol{n}$，即空间向量 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ 的数量积就是向量 $\boldsymbol{m}$ 在平面 α 上的投影向量与向量 $\boldsymbol{n}$ 的数量积.

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)对于向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则一定有 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$.　(　　)

(2)对于非零向量 $\boldsymbol{b}$，由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，可得 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$.　(　　)

(3)若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$，则 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 是钝角.　(　　)

(4)已知 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是夹角为 $120°$ 的两个单位向量，则向量 $\boldsymbol{e}_1$ 在向量 $\boldsymbol{e}_2$ 上的投影向量为 $-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{e}_2$.　(　　)

课中探究

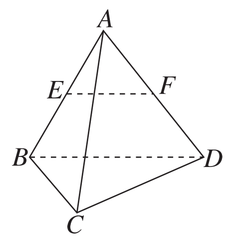
考点探究　素养小结

◆ **探究点一　空间向量的数量积运算**

例1 如图所示，在棱长为 1 的正四面体 $ABCD$ 中，E,F 分别是 AB,AD 的中点，求：

(1)$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BA}$；(2)$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BD}$；

(3)$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DC}$；(4)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$.



变式 (1)(多选题)[2025・河南洛阳高二期中] 已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，则　(　　)

A. $\overrightarrow{A_1B_1}\cdot\overrightarrow{AC}=1$　　B. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A_1C}=1$

C. $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB_1}=1$　　D. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A_1D}=1$

(2)正四面体 $P\text{-}ABC$ 的棱长为 2，点 D 是 $\triangle PAB$ 的重心，则 $\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{BC}=$________.

[素养小结]

(1)空间向量数量积运算的两种方法

①已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的模及 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，直接代入数量积公式计算.

②如果要求的是关于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的多项式形式的数量积，可以先利用数量积的运算律将多项式展开，再利用 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$ 及数量积公式进行计算.

(2)在几何体中求空间向量数量积的步骤

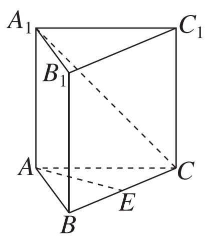
①首先将各向量分解成已知模和夹角的向量的组合形式.

②利用向量的运算律将数量积展开,转化为已知模和夹角的向量的数量积.

③代入 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 求解.

◆ 探究点二　利用向量的数量积解决夹角问题

例 2　如图,在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中,$AC=AB=AA_1=\sqrt{2}$,$BC=2AE=2$,求向量 $\overrightarrow{AE}$ 与 $\overrightarrow{A_1C}$ 的夹角.



变式　(1)已知平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,$AA_1=2$,$BD=3$,$\overrightarrow{AD_1}\cdot\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BC}=4$,则 $\cos\langle\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{BD}\rangle=$　(　　)

A. $\frac{2}{3}$　　B. $-\frac{2}{3}$

C. $\frac{3}{4}$　　D. $-\frac{3}{4}$

(2)[2025·成都石室中学高二月考] 把正方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折成大小为 $\frac{\pi}{3}$ 的二面角,E,F 分别是 BC,AD 的中点,O 是原正方形 $ABCD$ 的中心,则 $\angle EOF$ 的余弦值为________.

[素养小结]

(1)求两个空间向量的夹角的两种方法

①结合图形,平移向量,利用空间向量的夹角定义来求,但要注意向量夹角的范围.

②先求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,再利用公式 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$ 求 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$,最后确定 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

(2)用向量法求两直线的夹角

①取向量:在两直线上分别取方向向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$.

②运算:求 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$.

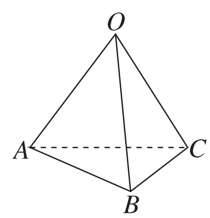
③结论:设两直线的夹角为 θ,则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle|$,进而得到 θ.

◆ 探究点三　利用投影向量解决空间向量的数量积

例 3　已知正四面体 $OABC$ 的棱长为 1,如图所示.

(1)确定向量 $\overrightarrow{OA}$ 在向量 $\overrightarrow{OB}$ 上的投影向量,并求 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$;

(2)确定向量 $\overrightarrow{AO}$ 在平面 ABC 上的投影向量,并求 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}$.



变式 在四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 中,四边形 $ABCD$ 为正方形,$AB=1$,且 $SA\perp$ 底面 $ABCD$,则向量 $\overrightarrow{CS}$ 在平面 $ABCD$ 上的投影向量是________,$\overrightarrow{CS}\cdot\overrightarrow{AB}=$________.

[素养小结]

利用空间向量的数量积的几何意义求两个向量的数量积时,准确探寻某一向量在平面(或向量)上的投影向量是解题的关键.

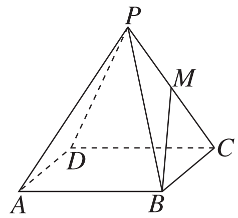
◆ 探究点四 利用空间向量的数量积求模

例 4 [2025·江苏南通高二期末] 已知平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的所有棱长均为 1,$\angle A_1AB=\angle A_1AD=\angle BAD=60°$,则线段 A_1C 的长为 ( )

A. $\sqrt{6}$　　B. 2

C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{2}$

变式 如图,在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形,侧棱 PA 的长为 2,且 PA 与 AB,AD 的夹角都是 $60°$,若 M 是 PC 的中点,则 $|\overrightarrow{BM}|=$ ( )



A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

[素养小结]

利用空间向量的数量积求模的基本方法

(1)将所求向量用已知向量表示,通过向量运算来求所求向量的模.

(2)因为 $\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$,所以 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}$,这是利用向量解决长度和距离问题的基本公式.

6.1.3 共面向量定理

【学习目标】

1. 结合立体几何与空间向量的特征,了解共面向量的概念.
2. 理解空间向量共面的充要条件,会证明空间四点共面.

课前预习 知识导学 素养初识

◆ 知识点一 向量共面

一般地,能平移到____________的向量叫作共面向量.

◆ 知识点二 共面向量定理

如果两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,那么向量 $\boldsymbol{p}$ 与向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面的充要条件是存在有序实数组 (x,y),使得 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$.

注意:(1)空间一点 P 位于平面 ABC 内的充要条件:存在有序实数组 (x,y),使 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ 或对空间任意一点 O,有 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$.

(2)共面向量定理的用途:

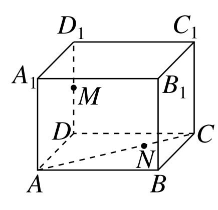
①证明四点共面;

②证明线面平行(进而证明面面平行).

课中探究 考点探究 素养小结

◆ 探究点一 四点共面的判断与证明

例 1 [2025·江苏启东汇龙中学月考] 如图所示,在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,M 为 DD_1 的中点,$N\in AC$,且 $AN:NC=2:1$,求证:A_1,B,N,M 四点共面.



变式 [2024·江苏徐州高二期末] 对空间中任意一点 O 和不共线的三点 A,B,C,下列式子中能得到 P 在平面 ABC 内的是 ( )

A. $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$

B. $\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

C. $\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}-4\overrightarrow{OC}$

D. $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OC}$

[素养小结]

(1)已知 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 不共面,若 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$,且 $x+y+z=1$,则 P,A,B,C 四点共面.

(2)证明 P,A,B,C 四点共面,可以通过证明存在有序实数组(x,y),使 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$($\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 不共线)来证明.

◆ 探究点二 向量共面的判断与证明

例 2 已知 A,B,C 三点不共线,对平面 ABC 外的任一点 O,点 M 满足 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.

(1)判断 $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}$ 三个向量是否共面;

(2)判断点 M 是否在平面 ABC 内.

变式 (1)[2025·江苏启东一中高二期末] 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面,则 ( )

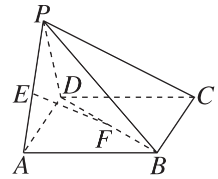
A. $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}$ 不共面

B. $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c},3\boldsymbol{c}$ 不共面

C. $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},2\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 不共面

D. $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c},2\boldsymbol{b}$ 不共面

(2)如图,在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是平行四边形,E,F 分别为 PA,BD 的中点.求证:向量 $\overrightarrow{EF},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BP}$ 共面.



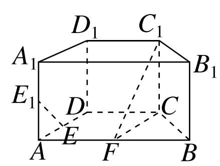
[素养小结]

(1)共面向量不仅包括在同一个平面内的向量,还包括平行于同一平面的向量.

(2)空间任意两个向量是共面的,但空间任意三个向量不一定共面.

◆ 探究点三 共面向量定理的应用

例 3 [2025·江苏南京高二期中] 如图,在直四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,底面 $ABCD$ 为等腰梯形,$AB/\!/CD$,$AB=4$,$CD=2$,E,E_1,F 分别是棱 AD,AA_1,AB 的中点.证明:直线 $EE_1/\!/$平面 FCC_1.



变式 [2025·江苏扬州新华中学高二月考] 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是空间中不共面的三个向量,$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{OB}=p\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+q\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{OC}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$.

(1)若 $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AC}$,$m\in\mathbf{R}$,求 p,q 的值;

(2)若 O,A,B,C 四点共面,求 $3p+5q$ 的值.

[素养小结]

通过证明三个向量共面,可以证明线面平行,进而证明面面平行,比如例题里面通过证明 $\overrightarrow{EE_1},\overrightarrow{CC_1},\overrightarrow{FC}$ 共面,EE_1 不在平面 FCC_1 内,得 EE_1∥平面 FCC_1.

◆ **探究点四 利用共面向量定理求参数**

例 4 [2025·江苏常州高二期中] 已知 A,B,C,D 四点共面,且其中任意三点均不共线,设 P 为空间中任意一点,且 P 不在平面 $ABCD$ 内,若 $\overrightarrow{BD}=6\overrightarrow{PA}-4\overrightarrow{PB}+\lambda\overrightarrow{PC}$,则 $\lambda=$ ( )

A. 2　　B. -2

C. 1　　D. -1

变式 已知点 D 在△ABC 确定的平面内,O 是平面 ABC 外任意一点,实数 x,y 满足 $\overrightarrow{OD}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$,则 x^2+y^2 的最小值为 ( )

A. $\frac{4}{5}$　　B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

C. 1　　D. 2

[素养小结]

已知 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 不共面,若 P,A,B,C 四点共面,$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$,则 $x+y+z=1$,利用这个结论构造关于参数的方程从而可求得参数.

6.2 空间向量的坐标表示

6.2.1 空间向量基本定理

【学习目标】

1. 在平面向量基本定理的基础上,能借助投影进行向量分解,知道空间向量基本定理.
2. 知道基底、单位正交基底,并能在选定基底下进行向量的表示及运算.

课前预习 知识导学 素养初识

◆ **知识点一 空间向量基本定理及其推论**

1. 空间向量基本定理

如果三个向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 不共面,那么对空间任一向量 $\boldsymbol{p}$,存在唯一的有序实数组 (x,y,z),使 $\boldsymbol{p}=$____________.

2. 空间向量基本定理的推论

设 O,A,B,C 是不共面的四点,则对空间任意一点 P,都存在唯一的有序实数组 (x,y,z),使得 $\overrightarrow{OP}=$____________.

注意:由于零向量与任意一个非零向量共线,与任意两个不共线的非零向量共面,所以若三个向量不共面,就说明它们都不是零向量.

◆ **知识点二 基底的有关概念**

1. 基底与基向量:如果三个向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 不共面,那么空间的每一个向量都可由向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 线性表示.我们把____________称为空间的一个基底,____________叫作基向量.

2. 正交基底与单位正交基底:如果空间一个基底的三个基向量____________,那么这个基底叫作正交基底.特别地,当一个正交基底的三个基向

量都是________时，称这个基底为单位正交基底，通常用$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$表示.

注意：(1)空间任意三个不共面的向量都可构成空间的一个基底，基底选定后，空间的所有向量均可由基底唯一表示；不同基底下，同一向量的表达式也有可能不同.

(2)一个基底是一个向量组，一个基向量是指基底中的某一个向量，二者是相关联的不同概念.

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)空间中的任何一个向量都可以用三个给定的向量表示. ( )

(2)若$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$为空间的一个基底，则$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$全不是零向量. ( )

(3)若向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$与任何向量都不能构成空间的一个基底，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$不一定共线. ( )

(4)任何三个不共线的向量都可构成空间的一个基底. ( )

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　基底的判断

例 1 已知$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$是空间的一个基底，且$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$，$\overrightarrow{OB}=-3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$，试判断$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$能否构成空间的一个基底.

变式 (1)[2025·江苏海安中学期中] 已知$SA\perp$平面ABC，$AB\perp AC$，$SA=AB=1$，$BC=\sqrt{5}$，则空间的一个单位正交基底可以为 ( )

A. $\left\{\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AS}\right\}$　B. $\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AS}\}$

C. $\left\{\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AC},\frac{1}{2}\overrightarrow{AS}\right\}$　D. $\left\{\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AB},\frac{\sqrt{5}}{5}\overrightarrow{BC}\right\}$

(2)(多选题)[2025·江苏苏州中学期中] 若$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$是空间的一个基底，则下列向量不可以构成空间的一个基底的是 ( )

A. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}$　B. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}$

C. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　D. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}$

[素养小结]

基底的判断思路：判断给出的三个向量能否构成空间的一个基底，关键是要判断这三个向量是否共面.首先应考虑三个向量中是否有零向量，其次判断三个非零向量是否共面.如果从正面难以入手判断，可假设三个向量共面，利用向量共面的充要条件建立方程，若方程有解，则三个向量共面；否则，三个向量不共面.

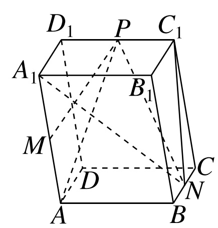
◆ 探究点二　用基底表示空间向量

例 2 [2024·江苏南京励志高中高二开学考] 如图所示，在平行六面体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，设$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{c}$，$M,N,P$分别是$AA_1$，$BC$，$C_1D_1$的中点.

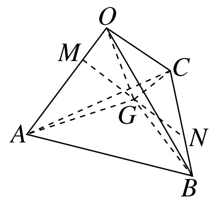
(1)试用$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$表示$\overrightarrow{AP},\overrightarrow{A_1N},\overrightarrow{PN}$；

(2)试用$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$表示$\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NC_1}$；

(3)若将题干中“P是C_1D_1的中点”改为“P在棱C_1D_1上，且$\frac{C_1P}{PD_1}=\frac{1}{2}$”，试用$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$表示向量$\overrightarrow{AP}$.



变式 (多选题)[2025·江苏南通中学期末] 如图,在四面体 $OABC$ 中,M,N 分别是棱 OA,CB 上的点,且 $AM=2MO,CN=2NB$,点 G 是线段 MN 的中点,则以下向量表示正确的是 ( )



A. $\overrightarrow{AG}=\frac{5}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$

B. $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}-\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$

C. $\overrightarrow{CG}=\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{OC}$

D. $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$

[素养小结]

用基底表示空间向量的方法

(1)若基底确定,则要充分利用向量加法的三角形法则和平行四边形法则,以及向量的数乘运算;(2)若未给定基底,则先选择基底,选择时,要尽量使所选的基向量能方便地表示其他向量,同时看基向量的模及其夹角是否已知或易求出.

◆ 探究点三 空间向量基本定理的应用

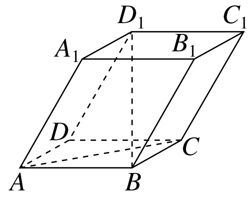
例 3 (1)在四面体 $OABC$ 中,空间的一点 M 满足 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{OC}$,若 $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}$ 共面,则 $\lambda=$ ( )

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{5}{12}$ D. $\frac{7}{12}$

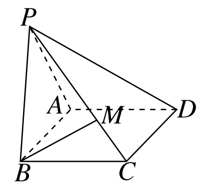
(2)如图所示,在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,底面 $ABCD$ 为平行四边形,以顶点 A 为端点的三条棱长都为 1,且两两夹角为 60°. 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$.

①以 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 为基底表示向量 $\overrightarrow{BD_1}$,并求 BD_1 的长;



②求 $\cos\langle\overrightarrow{BD_1},\overrightarrow{AC}\rangle$ 的值.

变式 (1)[2025·北京师大附中高二期末] 如图,已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是平行四边形,M 为侧棱 PC 上的点,且 $\overrightarrow{PM}=2\overrightarrow{MC}$,若 $\overrightarrow{BM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}+z\overrightarrow{AP}$,则 $x+y+z=$ ( )



A. $-\frac{5}{3}$ B. $-\frac{2}{3}$

C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{5}{3}$

(2)在正四棱锥 $P-ABCD$ 中,点 M,N,S 分别是棱 PA,PB,PC 上的点,且 $\overrightarrow{PM}=x\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PN}=y\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PS}=z\overrightarrow{PC}$,其中 $x,y,z\in(0,1]$.

①若 $x=1,y=\frac{1}{2}$,且 PD∥平面 MNS,求 z 的值;

②若 $x=\frac{2}{3},y=\frac{1}{2}$,且点 $D\in$ 平面 MNS,求 z 的值.

［素养小结］

用空间向量基本定理解决立体几何问题的步骤：首先根据已知条件，确定三个不共面的向量构成空间的一个基底，如果存在三个两两垂直的空间向量，那么可以确定一个单位正交基底；然后根据三角形法则及平行四边形法则，结合相等向量的代换、向量的运算用确定的基底（或已知基底）表示目标向量；最后把空间向量的运算转化为基向量的运算．涉及异面直线所成的角时，可用已知向量代入公式 $\cos\theta=\left|\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\right|$ 求解，其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 用基向量表示．

6.2.2　空间向量的坐标表示

第 1 课时　空间直角坐标系及空间向量运算的坐标表示

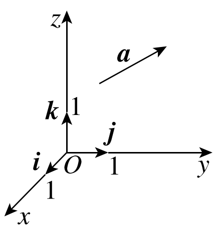
【学习目标】

1. 在空间向量基本定理的基础上，知道空间直角坐标系的概念．
2. 结合简单几何体，能写出有关点和向量的坐标．

课前预习　知识导学　素养初识

◆ 知识点一　空间直角坐标系、空间向量的坐标表示及空间中点的坐标表示

1. 空间直角坐标系

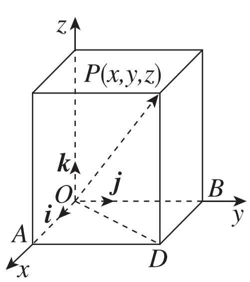


如图，在空间选定一点 O 和一个单位正交基底 $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$．以点 O 为原点，分别以 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的方向为正方向建立三条数轴：________________，它们都叫作坐标轴．这时我们说建立了一个空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$，点 O 叫作坐标原点，三条坐标轴中的每两条确定一个坐标平面，分别称为________平面、________平面、________平面．

2. 空间向量的坐标表示

在空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$ 中，对于空间任意一个向量 $\boldsymbol{a}$，根据空间向量基本定理，存在唯一的有序实数组 (a_1,a_2,a_3)，使 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$．有序实数组 (a_1,a_2,a_3) 叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 在空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$ 中的坐标，记作________________．

3. 空间中点的坐标表示



如图，在空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$ 中，对于空间任意一点 P，我们称向量 $\overrightarrow{OP}$ 为点 P 的位置向量，把与向量 $\overrightarrow{OP}$ 对应的有序实数组 (x,y,z) 叫作点 P 的坐标，记作________．

特殊点的坐标：原点 $(0,0,0)$；x,y,z 轴上的点的坐标分别为 $(x,0,0)$，$(0,y,0)$，$(0,0,z)$；坐标平面 xOy,yOz,xOz 上的点的坐标分别为 $(x,y,0)$，$(0,y,z)$，$(x,0,z)$．

4. 在空间直角坐标系中，点 $P(x,y,z)$ 关于坐标轴和坐标平面对称的点的坐标特点如下：

(1)关于坐标原点对称的点的坐标为 $(-x,-y,-z)$；

(2)关于横轴（x 轴）对称的点的坐标为 $(x,-y,-z)$；

(3)关于纵轴（y 轴）对称的点的坐标为 $(-x,y,-z)$；

(4)关于竖轴（z 轴）对称的点的坐标为 $(-x,-y,z)$；

(5)关于 xOy 平面对称的点的坐标为 $(x,y,-z)$；

(6)关于 yOz 平面对称的点的坐标为 $(-x,y,z)$；

(7)关于 zOx 平面对称的点的坐标为 $(x,-y,z)$．

◆ 知识点二　空间向量的坐标运算及空向向量平行的坐标表示

1. 空间向量坐标运算的法则

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=$________________，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=$________________，$\lambda\boldsymbol{a}=$____________，$\lambda\in\mathbf{R}$．

2. 空间向量平行的坐标表示

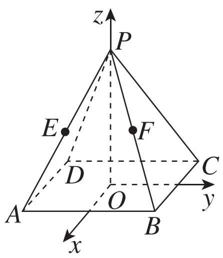
设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_2=\lambda x_1,y_2=\lambda y_1,z_2=\lambda z_1(\lambda\in\mathbf{R})$．

◆ 探究点一　求空间点的坐标

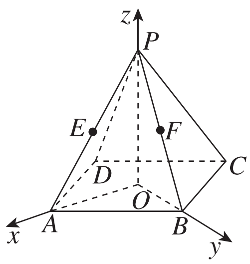
例 1 在正四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，O 为底面的中心，底面边长和正四棱锥的高都是 2，E，F 分别是侧棱 PA，PB 的中点.

(1)如图①，以$\{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{OP}\}$为正交基底，建立空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$，写出点 A，B，C，D，P，E，F 的坐标；

(2)如图②，以$\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OP}\}$为正交基底，建立空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$，写出点 A，B，C，D，P，E，F 的坐标.

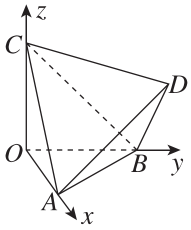


①

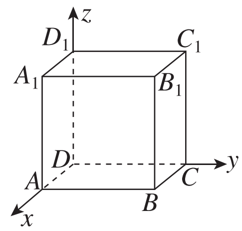


②

变式 (1)如图，棱长为$\sqrt{2}$的正四面体 $ABCD$ 的三个顶点 A，B，C 分别在空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$ 的 x，y，z 轴的正半轴上，则顶点 D 关于 z 轴对称的点的坐标为____________.



(2)[2024·江苏宿迁中学期中] 已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，如图所示，以$\{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}\}$为正交基底，建立空间直角坐标系 $D\text{-}xyz$，写出各顶点的坐标.



[素养小结]

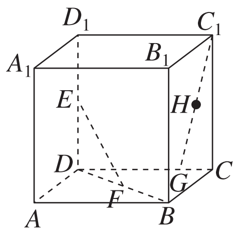
(1)建立空间直角坐标系时应遵循的两个原则：①让尽可能多的点落在坐标轴上或坐标平面内；②充分利用几何图形的对称性.

(2)求点 M 的坐标的方法：作 MM' 垂直于 xOy 平面，垂足为 M'，求 M' 的横坐标 x，纵坐标 y，即点 M 的横坐标 x，纵坐标 y，再求点 M 在 z 轴上射影的竖坐标 z，即为点 M 的竖坐标 z，于是得到点 M 的坐标 (x,y,z).

◆ 探究点二　空间向量的坐标表示

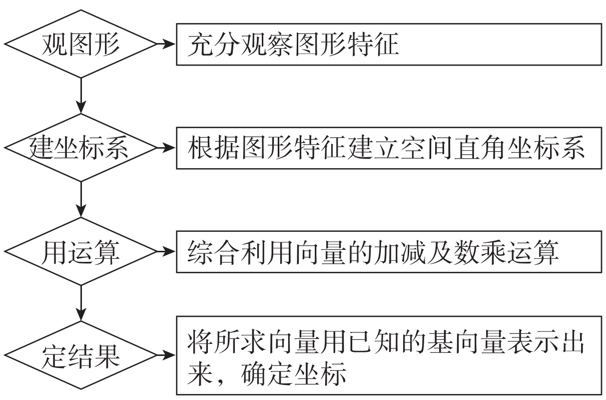
例 2 [2024·江苏南京一中期中] 在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC=AA_1=4$，建立适当的空间直角坐标系，求向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC_1}$，$\overrightarrow{BC_1}$ 的坐标.

变式 如图,在棱长为 1 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,E,F 分别是 D_1D,BD 的中点,G 在棱 CD 上,且 $CG=\frac{1}{4}CD$,H 为 C_1G 的中点.建立适当的空间直角坐标系,写出 $\overrightarrow{EF}$ 和 $\overrightarrow{GH}$ 的坐标.



[素养小结]

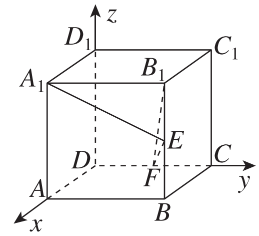
用坐标表示空间向量的步骤



◆ 探究点三 空间向量的坐标运算

例 3 (1)已知点 $A(-1,3,1)$,$B(-1,3,4)$,若 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$,求点 P 的坐标.

(2)已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2,E,F 分别为棱 BB_1,DC 的中点,如图所示,以 $\{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}\}$ 为正交基底,建立空间直角坐标系 $D\text{-}xyz$,写出向量 $\overrightarrow{EF}$,$\overrightarrow{B_1F}$,$\overrightarrow{A_1E}$ 的坐标.



变式 (1)已知空间向量 $\boldsymbol{p}=(1,0,-1)$,$\boldsymbol{q}=(0,3,1)$,则 $2\boldsymbol{p}-3\boldsymbol{q}=$ ( )

A. $(5,9,1)$ B. $(-3,6,5)$

C. $(-2,-9,5)$ D. $(2,-9,-5)$

(2)[2025·广东清远高二期中] 已知空间向量 $\boldsymbol{a}=(-2,1,m)$,$\boldsymbol{b}=(1,-1,0)$,$\boldsymbol{c}=(-1,2,n)$,若 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 共面,则 $m+n=$ ( )

A. -1 B. 0

C. 1 D. 2

(3)设点 $M(1,1,1)$,$A(2,1,-1)$,$O(0,0,0)$.若 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}$,求点 B 的坐标.

[素养小结]

(1)向量的坐标可由其两个端点的坐标确定,即向量的坐标等于其终点的坐标减去起点的坐标,特别地,当向量的起点为坐标原点时,向量的坐标即是终点的坐标.

(2)进行空间向量的加、减、数乘的坐标运算的关键是运用好其运算法则.

◆ **探究点四　空间向量平行的坐标表示及应用**

例 4 已知空间四点 $A(-2,3,1)$，$B(2,-5,3)$，$C(10,0,10)$和 $D(8,4,9)$，求证：四边形 $ABCD$ 是梯形.

变式 (1)[2025·湖南长沙一中高二月考] 在平行四边形 $ABCD$ 中，$A(1,-2,3)$，$B(-4,5,6)$，$C(0,1,2)$，则点 D 的坐标为　　(　　)

A. $(5,-6,-1)$

B. $(-5,8,5)$

C. $(-5,6,1)$

D. $(5,-8,-5)$

(2)已知 $\boldsymbol{a}=(-1,\lambda,-2)$，$\boldsymbol{b}=(2,-2,\mu)$，若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，则 $\lambda+\mu$ 的值为________.

[素养小结]

判断空间向量平行的步骤

(1)向量化：将空间中的平行转化为向量的平行.

(2)向量关系代数化：写出向量的坐标.

(3)对于 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，根据 $x_1=\lambda x_2$，$y_1=\lambda y_2$，$z_1=\lambda z_2(\lambda\in\mathbf{R})$或 $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$（$x_2$，$y_2$，$z_2$ 都不为 0）是否成立判断两向量是否平行.

第 2 课时　空间向量数量积的坐标运算及空间两点间的距离公式

【学习目标】

1. 类比平面向量，知道空间向量及其运算的坐标表示.
2. 基于运算，能探究空间向量模的坐标公式、空间两点间的距离公式.
3. 类比平面向量，知道空间向量平行、垂直、夹角的坐标表示.

课前预习

知识导学　素养初识

◆ **知识点一　空间向量数量积的坐标运算**

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，且 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$，$\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$，则

名称	满足条件	
	向量表示形式	坐标表示形式
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$	$\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$	________
$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$	________
$\lvert\boldsymbol{a}\rvert$	________	$\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$
$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$	$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert}$	$\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$

◆ **知识点二　空间两点间距离公式及线段的中点坐标**

1. 空间两点间的距离公式

若 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，则 A，B 两点间的距离为 $AB=\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=$________________.

2. 空间线段中点的坐标公式

设 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，则线段 AB 的中点 M 的坐标为________________.

课中探究

考点探究　素养小结

◆ **探究点一　空间向量数量积的坐标运算**

例 1 (1)[2025·江苏盐城五校联盟高二联考] 若 $\boldsymbol{a}=(1,2,-1)$，$\boldsymbol{b}=(-1,3,2)$，则 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=$　　(　　)

A. 25　　B. -25

C. -29　　D. 29

(2)已知向量 $\boldsymbol{a}=(0,2,3)$，$\boldsymbol{b}=(-2,4,6)$. 若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 垂直，则实数 k 的值为________.

变式 (1)已知 $\boldsymbol{a}=(-1,3,-2)$，$\boldsymbol{b}=(1,0,m)$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-3$，则 $m=$ ( )

A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

(2)若 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-2,-1,2)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(4,-3,-2)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ ( )

A. -5 B. -1 C. 5 D. 7

[素养小结]

关于空间向量数量积的坐标运算的两类问题

(1)直接计算问题

首先将空间向量用坐标表示出来，然后准确运用空间向量数量积的坐标运算公式计算.

(2)求参数值

首先把向量坐标形式表示出来，然后通过数量积运算建立方程(或方程组)，解方程(或方程组)求出参数.

◆ 探究点二 空间两点间的距离

例 2 (1)在空间直角坐标系中，点 $A(1,2,3)$，$B(2,7,5)$，$C(4,9,7)$，则点 A 到 BC 的中点 D 的距离为 ( )

A. $2\sqrt{13}$ B. $\sqrt{11}$ C. 7 D. 6

(2)[2025·北京丰台区高二期中] 在棱长为 4 的正方体内有一点 P，它到该正方体共顶点的三个面的距离分别为 2,1,1，记正方体的中心为点 O，则 $OP=$ ( )

A. $\sqrt{10}$ B. $\sqrt{6}$ C. 2 D. $\sqrt{2}$

变式 已知 $A(3,2,1)$，$B(1,0,4)$，求：

(1)线段 AB 的中点坐标和线段 AB 的长度；

(2)到 A，B 两点距离相等的点 $P(x,y,z)$ 的坐标满足的条件.

[素养小结]

利用空间两点间的距离公式求空间两点间距离的步骤：

(1)建立适当的坐标系，并写出相关点的坐标；

(2)代入空间两点间的距离公式求值.

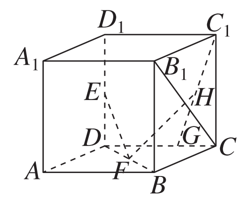
◆ 探究点三 利用数量积公式求夹角及模

例 3 如图，在棱长为 2 的正方体中，E，F 分别是 DD_1，DB 的中点，G 在棱 CD 上，且 $CG=\frac{1}{3}CD$，H 是 C_1G 的中点. 建立适当的空间直角坐标系，解决下列问题.

(1)求证：$EF\perp B_1C$；

(2)求 $\cos\langle\overrightarrow{EF},\overrightarrow{C_1G}\rangle$；

(3)求 HF 的长.

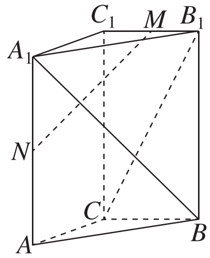


变式 (1)[2025·江苏海门中学期中] 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,1,0)$，$\boldsymbol{b}=(m,0,2)$，$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，若向量 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 与 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角，则实数 k 的取值范围是________.

(2)如图，在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$CA=CB=1$，$\angle BCA=90^\circ$，$AA_1=2$，M，N 分别是 B_1C_1，A_1A 的中点.

①求 M，N 之间的距离；

②求 $\cos\langle\overrightarrow{BA_1},\overrightarrow{CB_1}\rangle$ 的值.



[素养小结]

利用空间向量的坐标运算求夹角与模的一般步骤

(1)建系：根据题目中的几何图形建立恰当的空间直角坐标系.

(2)求坐标：①求出相关点的坐标；②写出向量的坐标.

(3)论证、计算：结合公式进行论证、计算.

(4)转化：转化为夹角与距离问题.

拓展 [2024·杭州二中高二期中] 在棱长为1的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，P 是底面 $ABCD$(含边界)上一动点，满足 $A_1P\perp AC_1$，则线段 A_1P 长度的取值范围是 ( )

A. $\left[\frac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{2}\right]$

B. $\left[\frac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{3}\right]$

C. $[1,\sqrt{2}]$

D. $[\sqrt{2},\sqrt{3}]$

6.3 空间向量的应用

6.3.1 直线的方向向量与平面的法向量

【学习目标】

1. 联系空间向量与立体几何，知道直线的方向向量和平面的法向量.
2. 结合空间几何体，能求出有关直线的方向向量和平面的法向量.
3. 在空间点的向量表示的基础上，能借助直线的方向向量和平面的法向量来刻画直线和平面.

课前预习 知识导学 素养初识

◆ **知识点一 直线的方向向量**

把直线 l 上的向量 $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{e}\neq\boldsymbol{0})$ 以及________的非零向量叫作直线 l 的方向向量.

注意：(1)空间中，一个向量成为直线 l 的方向向量，必须具备以下两个条件：①是非零向量；②向量所在的直线与 l 平行或重合.

(2)与直线 l 平行的任意非零向量 $\boldsymbol{a}$ 都是直线 l 的方向向量，且直线 l 的方向向量有无数个.

◆ **知识点二 平面的法向量**

1. 定义：如果表示非零向量 $\boldsymbol{n}$ 的有向线段所在直线垂直于平面 α，那么称向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直于平面 α，记作________. 此时，我们把向量 $\boldsymbol{n}$ 叫作平面 α 的法向量.

注意：一个平面的法向量不是唯一的，在应用时，可适当取平面的一个法向量. 已知一平面内两条相交直线的方向向量，可求出该平面的一个法向量.

2. 求平面法向量的方法

(1)几何体中有具体的直线与平面垂直，只需证明线面垂直，取该垂线的一个方向向量即得平面的法向量.

(2)几何体中没有具体的直线与平面垂直，一般要建立空间直角坐标系，然后用待定系数法求解，一般步骤如下：

(i)设出平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$；

(ii)找出(求出)平面内的两个不共线的向量的坐标 $\boldsymbol{a}=(a_1,b_1,c_1)$，$\boldsymbol{b}=(a_2,b_2,c_2)$；